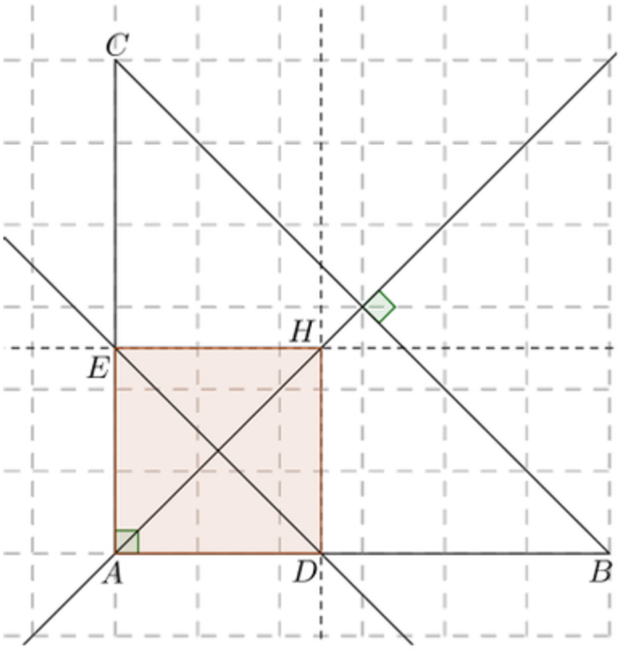
Solution de l'Énoncé 6



Question 1

Le triangle ABC étant rectangle en A, alors d'après le Théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= AB^2 + AB^2 \quad \longleftarrow \quad \text{car } AC = AB \ (ABC \text{ est isocèle en } A) \\ BC^2 &= 2AB^2. \end{aligned}$$

D'où

$$BC = \sqrt{2AB^2} = AB\sqrt{2},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{BC = 6\sqrt{2} \text{ cm}}$$

Question 2

Puisqu'on a (DE) // (BC), alors les triangles ADE et ABC sont dans une configuration de Thalès. D'où, d'après le Théorème de Thalès,

$$\begin{aligned} \frac{AE}{AC} &= \frac{AD}{AB} \\ AE &= \frac{AD \times AC}{AB} \\ &= \frac{AD \times AB}{AB} \quad \longleftarrow \quad \text{car } AC = AB \ (ABC \text{ est isocèle en } A) \\ &= AD. \quad \longleftarrow \quad \text{on simplifie par } AB \end{aligned} \tag{17}$$

On a donc

$$\boxed{AE = \frac{5}{2} \text{ cm}}$$

NB : Fiche à imprimer

Question 3

Il suffit de montrer que le quadrilatère AEHD possède trois angles droits (donc un rectangle) et deux côtés consécutifs de même longueur (voir Chapitre 0 pour plus de détails).

• Montrons d'abord que AEHD possède trois angles droits.

D'emblée, mettons en évidence le fait que $(AB) = (AD)$ et $(AC) = (AE)$. Le triangle ABC étant rectangle en A, alors $(AB) \perp (AC)$, c'est-à-dire

$$(AD) \perp (AE). \tag{18}$$

Puisque $(AB) \mathbin{/\!/} (EH)$ et $(AB) \perp (AC)$, alors clairement $(EH) \perp (AC)$, c'est-à-dire

$$(EH) \perp (AE). \tag{19}$$

De même, puisque $(AC) \mathbin{/\!/} (DH)$ et $(AC) \perp (AB)$, alors clairement $(DH) \perp (AB)$, c'est-à-dire

$$(DH) \perp (AD). \tag{20}$$

En regroupant (18), (19) et (20), on voit facilement que AEHD possède trois angles droits. Il est donc un rectangle.

• Montrons maintenant que AEHD possède deux côtés consécutifs de même longueur.
Dans la Question 2), on a vu que $AE = AD = \dfrac{5}{2}$ cm. Donc AEHD possède deux côtés consécutifs de même longueur.

En résumé, AEHD est un rectangle possédant deux côtés consécutifs de même longueur. Il est donc un carré.

Question 4

• Le quadrilatère AEHD étant un carré par la Question 3), alors ses diagonales [ED] et [AH] sont perpendiculaires (et sont de même longueur). Or $(ED) \mathbin{/\!/} (BC)$. Donc on a

$$\boxed{(AH) \perp (BC)}$$

• La condition $(AH) \perp (BC)$ montre que (AH) est confondue avec le support de la hauteur du triangle ABC passant par le point A. Puisque ABC est isocèle en A, alors cette hauteur est la médiatrice de [BC]. Donc (AH) est la médiatrice du segment [BC].

NB : Fiche à imprimer